BRESCIA - Anno accademico 1999/2000
"L'insegnamento e l'apprendimento della matematica: problemi e prospettive"

Raffaella Manara

Parte I

PROBLEMI E LOGICA

Si può insegnare a ragionare?

Voglio partire da una affermazione provocatoria: non si insegna a ragionare, ciascuno di noi semplicemente ragiona per sua natura, ognuno sa mettere in atto spontaneamente inferenze che riconosce come errate o corrette alla luce dell'esperienza.
Dice J. H. Newman nella *Grammatica dell'assenso*: " *D'ordinario un ragionamento si formula nella nostra mente come un solo atto e non come una catena, una serie d'atti. Apprendiamo la premessa poi apprendiamo la conseguenza senza esplicitamente riconoscere il loro nesso, come per una spontanea ed istantanea congruenza del primo e del secondo pensiero. Quasi per percezione istintiva procediamo da premessa a conclusione...ragioniamo senza sforzo o proposito, e senza che di necessità ci sia noto il percorso seguito dalla nostra mente nel procedere da premessa a conclusione. Questo è il raziocinio allo stato grezzo, quello dei rozzi; ma è anche il raziocinio esercitato dal resto degli uomini. E non vi è una base precostituita su cui fondarci per decidere che non è capace nella sua istintività di darci informazioni corrette; che non merita la stessa fiducia che meritano i ragguagli dei sensi e la memoria...*". [1]
Particolarmente bene ragionano i bambini e i giovani. Essi però raramente sanno *rendere conto* dei ragionamenti fatti, di solito non sanno esplicitare completamente sul piano verbale e rendere coscienti i percorsi inferenziali seguiti.
Riflettere sul proprio pensiero non è facile e non è spontaneo: se non si impara però, si può produrre un affievolimento della capacità ragionativa, che non può esercitarsi sempre solo in modo inconsapevole. È questo il livello di consapevolezza che può essere educato, che deve essere sviluppato, ed è solo in questo senso che possiamo insegnare a *ragionare*: questa è l'educazione alla logica, l'utilità dell'insegnamento di quella che possiamo chiamare "logica".
Non si deve invece cadere nella tentazione opposta, di pensare che sia possibile il percorso inverso, *insegnare i ragionamenti*.
Intendo riferirmi alla pretesa che la razionalità scaturisca dalla conoscenza e dall'applicazione delle regole della logica, e che solo tale strumento metta la persona nelle condizioni di applicare la ragione, di "ragionare". È proprio in questo senso che non potremmo mai insegnare a ragionare!
Chiunque tra noi ha un minimo di esperienza sa che anche un lavoro pressante e rigoroso di insegnamento delle regole e delle strutture della lingua e della logica non produce il miglioramento delle effettive capacità argomentative e razionali dei

[1] J. H. Newman, *Grammatica dell'assenso*, Jaca Book, MI, 1980, pag. 159 e seg.

giovani! Anzi, le regole faticosamente imparate e applicate meccanicamente vengono dimenticate in breve tempo, e si produce il disamore allo strumento stesso della lingua, come della matematica o della logica.
Possiamo dunque concludere che per quanto riguarda la logica, ha senso ed è produttivo soltanto un insegnamento che miri a ordinare, organizzare, dare forma e consapevolezza a una ragione che spontaneamente opera nell'esperienza originaria della persona.

La logica sta al testo o ai contenuti scientifici come la piantina topografica di una città sta alla città stessa. Non potremmo descrivere una città descrivendone la pianta; se dovessimo preparare una visita, è chiaro che dovremmo anzitutto parlare di ciò che nella città c'è, della sua storia, dei suoi monumenti, della sua struttura; e avremmo bisogno, per descriverla, di fotografie, di quadri, di racconti.
Ma nel momento in cui ci accingessimo a cominciare la visita, non potremmo che avere in mano la piantina! Per *orientarsi* entro un contesto nuovo, ho bisogno della visione sintetica della pianta. Questa non mi occorrerà più, solamente quando la visione globale della città è ormai patrimonio della mia conoscenza.
Tuttavia, ricordiamo che anche nella città dove abitiamo, se dobbiamo raggiungere un luogo nuovo, dobbiamo guardare la pianta!
Proprio questo è la logica per il pensiero: la possibilità di *orientarsi nel contenuto*, non il contenuto stesso.

Dal senso comune alla logica, dal linguaggio comune al linguaggio specifico

C'è un **senso comune** che è l'esperienza elementare della realtà indistinta, precedente la disciplina, e che fa intervenire la lingua, il linguaggio, nel senso di lingua materna, di linguaggio dell'esperienza.
Quando parliamo di *senso comune* non si deve pensare al "buon senso" o alla saggezza pratica popolare; e neppure, in senso sociologico, all'opinione dominante nella società in un certo momento storico, che configura una specie di cultura di massa.
Intendiamo invece con senso comune *l'insieme delle certezze primarie universali* dalle quali procede ogni conoscenza umana, sia ordinaria che scientifica. Il valore del senso comune sta nell'avere dei fondamenti di certezza intimamente connessi all'*esperienza*.
È il senso comune che ci propone nell'esperienza la realtà come *intelligibile*; esso non è dunque sorgente di irrazionalismo o fideismo, ma *radice della ragionevolezza* nelle spiegazioni e nelle scelte. Il senso comune è il contesto fondamentale che consente di intenderci tra persone, anche quando non possiamo o non vogliamo esplicitare *tutte* le premesse del nostro parlare. Esso è dunque la condizione perché sia possibile una "semantica dell'implicito", la comprensione dei presupposti non espressi di un discorso.
Il senso comune comprende le forme di inferenza che la ragione usa spontaneamente, a volte inconsciamente, come dice Newman. Si tratta di una forma di *razionalità naturale* che consente agli uomini di scegliere i propri comportamenti quotidiani, di agire nelle situazioni immediate, di dedurre giudizi dalle informazioni parziali e incomplete che le realtà fornisce, modificandoli poi sulla base di nuove informazioni, di cogliere dai contesti della realtà le *informazioni implicite* che costituiscono gli *indizi* da cui il pensiero procede nelle sue inferenze, nei suoi "ragionamenti". Su questo terreno comune di razionalità dell'esperienza si innesta poi l'esigenza del

pensiero umano di prendere coscienza di se stesso, analizzando ed esplicitando i processi delle proprie deduzioni, e precisandone, dove è possibile, le leggi, le regole, cioè le condizioni della conoscenza cosciente e comunicabile della realtà.
È questo il campo di interesse e riflessione della **logica** da una parte, intesa come il livello della presa di coscienza da parte della ragione dei propri processi di conoscenza e di deduzione; della scienza dall'altra, che deve staccarsi e anche contrapporsi al senso comune, in quanto rappresenta una *riflessione metodica e sistematica sull'esperienza*, alla ricerca di ragioni più forti e più certe delle stesse esperienze sensibili.
La scienza vuole condurre alla possibilità di formulare giudizi che esprimano una razionalità diversa da quella spontanea del senso comune.
Dice Freudenthal: "*Il senso comune accetta le cose come garantite, per buone e anche per cattive ragioni. La matematica cerca e chiede le ragioni, come ogni altra scienza e forse cerca delle ragioni migliori di ogni altra scienza.*" [2]
" *In fisica e in chimica si usa il principio didattico di combattere il senso comune, cacciandolo come si caccia il demonio con esorcismi: le idee del senso comune ostacolano quelle della scienza. I ricercatori si meravigliano che la gente ancora adotti delle idee basate sul senso comune, idee che avrebbe dovuto gettar via da tempo. In generale, io penso che nell'istruzione sarebbe auspicabile che si incominciasse con le idee del senso comune, invece di gettarle come sorpassate e da sopprimere, se possibile. Questa mia convinzione è confortata dal fatto, più o meno spontaneo, dello sviluppo della matematica.*
Nel corso della vita, il senso comune genera delle abitudini comuni, le quali, quando si tratta di aritmetica, si manifestano come algoritmi e procedure di azione e di pensiero, inizialmente sostenute da paradigmi, e poi superate dall'astrazione. ...
Forse che il senso comune è una specie di massimo comun divisore dell'intuizione, del quale partecipano tutti i membri di una certa comunità?
La matematica, per quanto radicata nel senso comune, nell'opinione e nella mente di moltissimi è più lontana dal senso comune di ogni altra cosa. Che cosa la rende così lontana? Forse che più le radici sono profonde e più la cima è alta? La matematica è diversa...: è una questione di senso comune, solo meglio organizzato."[3]
Sono considerazioni di grande acutezza e importanza, come anche le successive a proposito delle "regressioni al senso comune" che si verificano tanto spesso nel percorso di apprendimento dei ragazzi: "*Quando un algoritmo non ha avuto l'occasione di raggiungere lo stadio di senso comune, allora il discente, per paura di applicare un algoritmo sbagliato o di applicare in modo sbagliato si rifugia nell'utilizzare ciò che è rimasto di senso comune nella sua testa*."[4]
È questa la più frequente e visibile radice di tanti errori che osserviamo negli alunni durante il percorso scolastico.

Nessuna disciplina allora può prescindere dal senso comune, nel quale affonda le radici: ciascuna disciplina propone un percorso di conoscenza che può portare al *distacco* dal senso comune (scienza), laddove esso si dimostra non adeguato a spiegare i fenomeni coerentemente e in profondità. Meglio ancora, ogni disciplina mira piuttosto alla *ricomprensione* di ciò che il senso comune ci fornisce entro un *orizzonte di senso* più ampio e più profondo.

---

[2] H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola, Bs, 1994, pag. 22
[3] Ibidem, pag. 26 e seg.
[4] Ibidem, pag. 29

Da questo punto di vista, nessuna disciplina può prescindere dal linguaggio comune, dalla lingua madre, la lingua della comunicazione del senso e della possibilità del senso. È importante allora per ogni insegnante prendere coscienza dei nessi, delle affinità e delle differenze, delle autonomie e delle dipendenze reciproche tra linguaggi disciplinari e linguaggio globale.

Introduzione alla logica

La scuola media interviene in un momento dello sviluppo del ragazzo in cui il senso comune è ancora in larga misura l'ambito della razionalità. La precisazione della logica come forma del pensiero, come struttura del ragionamento deve partire dallo strumento che principalmente ci consente di trasmetterci i sensi e i significati, cioè la lingua. Non è un caso che fino alle medie la parola "logica" intervenga in modo preponderante proprio in ambito linguistico, nella "analisi logica" della lingua.
Le altre discipline possono recare il proprio contributo non tanto aggiungendo formalismi e regole, ma soprattutto svolgendo un lavoro che metta i presupposti della presa di coscienza critica dei procedimenti specifici. Ciò deve essere fatto nei termini adeguati alla situazione dei ragazzi, perciò anzitutto favorendo e anzi creando i nessi con il lavoro che viene svolto in ambito linguistico. Ciò crea un legame che non è a senso unico: la precisazione della competenza linguistica è fortemente favorita e spinta avanti da chiunque lavori in ambito disciplinare con la consapevolezza indicata.
Per quanto concerne la matematica, la logica formale è ormai considerata un capitolo al suo interno. Quando e come allora bisogna insegnarla? Quanto? E qual è lo scopo principale che ci si prefigge? Per rispondere, delineiamo dapprima una visione sintetica sulla struttura dell'*inferenza*, cioè di quelle *argomentazioni* che in logica o nel senso comune consideriamo ragionamenti validi.

I giudizi: enunciati e predicati

La logica distingue i tipi di *proposizioni* di cui facciamo uso nella comune argomentazione, in:

a) *enunciati o proposizioni chiuse*, asserzioni tali che possano risultare o vere o false. Essi affermano qualcosa di un particolare soggetto, o dicono fatti.
   Sono enunciati in senso logico ad esempio:

Io mangio; Oggi è lunedì; Carlo è nato a Milano; Il risotto è bruciato; Il 1996 è un anno bisestile…

La verità di un enunciato non dipende da elementi variabili, ma dal riscontro con un'evidenza, dall'interpretazione in un contesto di realtà. Per essere precisi, occorrerebbe distinguere tra sintassi e semantica, sottolineando che non ci curiamo qui di stabilire come si attribuisca il valore di verità ad un enunciato.
Non può essere considerato un enunciato in senso logico formale un giudizio di valore, un apprezzamento, un'opinione, una previsione, un'esortazione o un imperativo, un enunciato ottativo. Ad esempio, non sono enunciati:
Questo quadro è brutto; Domani pioverà; Mi piace il jazz; Vai fuori!; Vorrei tanto vincere alla lotteria.

Osserviamo infine che dal punto di vista della logica sono enunciati *distinti* quelli che asseriscono fatti e quelli che stabiliscono la verità o falsità del fatto. Dire: "Oggi è mercoledì" è una enunciazione diversa da: "È vero che oggi è mercoledì", oppure da: "Non è vero che oggi è mercoledì". Il primo enunciato ha come oggetto un fatto (proposizione reale), gli altri due hanno a tema un giudizio, un atto del pensiero (proposizione nozionale). Tale distinzione è rilevante per evitare di cadere nella contraddizione logica dell'autoreferenzialità delle proposizioni.

b) *proposizioni aperte*, che possono essere riferite a diversi *soggetti (argomenti)*, ed essere vere o false per alcuni e non per altri.

Esse vengono chiamate *predicati* o *funzioni enunciative*.
Nella loro formulazione linguistica compare un termine *variabile*, al quale vanno assegnati valori in un insieme, detto *universo dei soggetti*: questa assegnazione viene chiamata *interpretazione*, perché di un predicato non posso affermare la verità o la falsità così come è, ha senso porsi il problema solo dopo aver scelto il soggetto a cui si riferisce. L'insieme dei soggetti per i quali il predicato è vero è detto *insieme di validità* del predicato.
Esempi:
- "Tizio abita in via Inganni" è un predicato che risulta vero se a 'Tizio' sostituisco uno qualsiasi degli abitanti di via Inganni, falso se a 'Tizio' sostituisco, per esempio, me stessa. 'Tizio' rappresenta una variabile, che assume valori nell'insieme delle persone (soggetti)
- "La tale nazione fa parte dell'ONU" è un predicato vero per tutte le nazioni che costituiscono l'Onu, falso per le altre.
- "*n* è un multiplo di 5" è vero se mettiamo al posto di *n* un numero che termina con 5 o con 0, falso se sostituiamo a *n* un numero che finisce per 2. '*n*' è il simbolo della variabile, che per questo predicato prende valore nell'insieme dei numeri naturali (soggetti).

L'analisi della verità o falsità delle proposizioni che abbiamo chiamato predicati richiede di introdurre la funzione logica di *quantificazione*, che chiarisce *a quanti* soggetti (argomenti) di un certo insieme esse si riferiscono: in base a ciò è possibile stabilire la verità o falsità.
La quantificazione implica l'uso delle espressioni linguistiche: per tutti, per qualunque, per ogni, è sempre possibile, per nessuno (quantificatore universale). Oppure: per alcuni, per qualche, ce n'è qualcuno, esiste almeno uno (quantificatore esistenziale).

Gli enunciati singoli, chiusi o aperti, vengono chiamati "proposizioni atomiche": interesse e funzione della logica è analizzare i modi in cui è possibile *combinare tra loro* proposizioni atomiche in modo da ottenere proposizioni *composte*, di cui possiamo ancora stabilire la verità o la falsità. Ciò permetterà di dominare il significato e la verità di discorsi complessi, costituiti da molte proposizioni.
Anche sotto questo aspetto, la logica formale opera delle scelte, e analizza *alcuni tipi di connessioni* tra le proposizioni. La formalizzazione tende a isolare solo alcuni degli schemi possibili nel discorso linguistico, che sono estremamente complessi: accenneremo all'analisi dei *connettivi logici*: non, e, o (vel e aut), se..allora.
Tra di essi il più importante e significativo è l'ultimo, chiamato "implicazione materiale": esso formalizza in un modo specifico la relazione di implicazione naturale, cioè la dipendenza logica (non necessariamente temporale) della verità della seconda proposizione da quella della prima.
A un secondo livello si colloca l'analisi delle *forme del ragionamento*, ovvero di quegli schemi di relazioni tra implicazioni che accettiamo come *regole di deduzione*,

cioè come legami logici che permettono di collegare tra loro non due, ma tre proposizioni, due delle quali sono dette premesse, e la terza conseguenza. Si ha un ragionamento quando da premesse vere si giunge a conseguenze vere.

Forme del ragionamento

Esistono tre modi fondamentali di argomentare coerentemente sulla realtà, ovvero di trarre conclusioni vere o accettabili da premesse accertate vere o ritenute vere: l'*induzione,* l'*abduzione* (Pierce) o *illazione,* e la *deduzione*.
Tutte e tre queste forme sono necessarie alla nostra ragione per avere 'presa' sul reale, ovvero per trarre dall'esperienza *giudizi significativi*.
Analizziamole brevemente, per soffermarci in modo più analitico sulla deduzione, come forma caratteristica del pensiero scientifico e matematico in particolare.

a) L'induzione
Il ragionamento induttivo è quello che da un certo numero (finito) di fatti, osservazioni, esperienze particolari ci consente di formulare proposizioni generali.
Esempio (di Pierce):
Da questo sacchetto ho estratto questi fagioli; i fagioli che ho estratto sono bianchi: tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi.
L'induzione è il ragionamento base delle *scienze empiriche*: il ripetersi delle prove con certi esiti porta a dire (ipotesi induttiva) che tale esito si verificherà *sempre*. Più grande è il numero delle prove fatte, più attendibile è la *previsione* formulata.
Già l'uso della parola "attendibile" mostra quale sia il limite del ragionamento induttivo: esso non *è necessariamente* valido, la sua validità è sottoposta alla prova dei fatti, e di per sé nulla garantisce che un fatto che si è ripetuto cento, mille, milioni di volte *debba verificarsi* la volta successiva.
Anche nel comune agire e riflettere utilizziamo in abbondanza il ragionamento induttivo. Esso si fonda sulla osservazione delle *analogie* e delle somiglianze, delle permanenze (invarianze) nel tempo e nello spazio: perciò è inevitabile che lo applichiamo, che esso costituisca la base delle nostre decisioni e azioni.
Ragioniamo per induzione anche quando riconduciamo un fatto o un problema nuovo ai termini già noti, agli schemi comportamentali e interpretativi che hanno funzionato precedentemente in situazioni analoghe: "Il professore non crederà che ho fatto bene il compito da solo, perché ormai ha deciso che io valgo 5".

Accenno soltanto al fatto che l'induzione può portare a formulare proposizioni riguardanti un numero finito o infinito di soggetti: la differenza sta nel fatto che quando si formulano proposizioni riguardanti insiemi infiniti, non si sarà mai in grado di verificare *direttamente* la validità del ragionamento. Mentre nel caso finito ciò è possibile: nel classico esempio sopra riportato di Pierce del sacchetto di fagioli, posso estrarre *effettivamente tutti* i fagioli, stabilendo così se ve ne sia qualcuno non bianco.
Questa è una questione molto importante per la matematica, che utilizza una forma speciale di ragionamento induttivo *(induzione matematica)* proprio per affermare, sotto certe condizioni, proposizioni riguardanti insiemi infiniti, dopo aver verificato un numero *finito* di casi.
Ho citato l'induzione matematica per sottolineare che anche la matematica, che consideriamo fondata esclusivamente sul metodo deduttivo, quasi anzi modello della struttura teorica ipotetico-deduttiva, non può invece fare a meno dell'induzione, che rappresenta la possibilità di *previsione*, di formulazione di ipotesi sulla realtà.

b) L'abduzione o il ragionamento per indizi

Ancora più importante per la nostra ragione è *ricercare le cause* dei fatti, *risalire* alle origini, ai moventi, alle spiegazioni.
Questa forma di argomentazione costituisce la gran parte delle nostre riflessioni, e si esprime nella massima parte dei nostri discorsi. Riprendiamo l'esempio dei fagioli.
Se diciamo: "Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi; questo fagiolo è bianco, dunque questo fagiolo viene da questo sacchetto", facciamo una illazione (o abduzione).
Analogamente è una illazione la seguente: "Se piove, Piero prende l'ombrello. Piero oggi ha l'ombrello, dunque si vede che piove".
Si possono riconoscere in questa forma la massima parte dei nostri ragionamenti quotidiani: è proprio il ragionamento che facciamo quando, incontrando nel corridoio un tizio con l'ombrello, senza guardare dalla finestra, pensiamo: "toh, piove."

Possiamo accettare senza discussione questa forma di ragionamento? È un ragionamento *valido*? Non assomiglia invece piuttosto a quello che facciamo quando *tiriamo a indovinare*?
Se lo analizziamo infatti, possiamo facilmente constatare che esso consente di trarre conclusioni che possono essere tanto estremamente ragionevoli, quanto del tutto infondate: la ragionevolezza (validità) del ragionamento non discende dalle premesse, ma **dipende essenzialmente dal contesto.**
Pensiamo ai due esempi proposti.
Nel primo, se io mi trovassi in una stanza isolata, nella quale c'è un unico sacchetto di fagioli, nessuno è entrato o uscito tranne me, stabilire che il fagiolo proviene dal sacchetto è molto sensato. Ma se fossi in un negozio pieno di sacchi di cereali, non avendo alcun modo per stabilire da quale sacco provenga, trarrei una conclusione alquanto azzardata.
Analogamente per il secondo esempio posso riflettere che, se conosco Piero e so che non va abitualmente in giro con l'ombrello senza necessità, se non ho modo di guardare dalla finestra per vedere che tempo fa, traggo una conseguenza ragionevolmente fondata. Tuttavia potrei allo stesso modo riflettere che poteva piovere quando Piero usciva di casa, oppure poteva minacciare di piovere quando Piero è uscito di casa, dunque Piero ha preso l'ombrello per prudenza, ma poi è venuto il sole.
Tutte le argomentazioni sono altrettanto ragionevoli, e non è possibile stabilire il grado di acutezza del ragionamento senza ulteriori elementi *relativi al contesto,* alla situazione in cui sono quando incontro Piero.
Questa è la struttura del *ragionamento per indizi*: dai fatti si risale alle cause, ma l'attendibilità della conclusione dipende dagli elementi che ho a disposizione, dal contesto della situazione: può rivelarsi assolutamente precisa, quanto del tutto infondata. La ragionevolezza è legata al contesto, che però non è in **nessun modo contenuto nella formulazione verbale del ragionamento,** è totalmente implicito.
Ecco perché questa forma di argomentazione nella logica formale viene esclusa dalle forme *corrette della deduzione*: i due ragionamenti proposti come esempi sono considerate *forme errate di deduzione* (assunzione dell'inversa).

c) La deduzione

Riferiamoci ancora agli esempi precedenti.
Se diciamo: "Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi; questo fagiolo è di questo sacchetto, dunque questo fagiolo è bianco", facciamo una *deduzione*, e questa è una forma di ragionamento che ci consente di trarre una conclusione sicuramente vera, *necessariamente vera,* anche se fossi cieco e non vedessi neppure il colore del fagiolo.
Se infatti il fagiolo non fosse bianco, cadrebbe non la conclusione, ma la premessa: qualcuno ingannevolmente avrebbe messo un fagiolo non bianco nel sacchetto.
Analogamente, deducendo: "Ogni volta che piove Piero prende l'ombrello. Oggi piove, perciò Piero prende l'ombrello", siamo certi di formulare una conclusione che non può essere smentita, a meno di scalzare la premessa.

Si tratta di esempi di applicazione della regola logica del *distacco* o del *modus ponens,* schematizzabile in questo modo:

è vero che $p \rightarrow q$
è vera p
______________ → allora deduciamo:
è vera q (si è distaccato il conseguente dall'antecedente).

Simbolizzando in modo analogo l'esempio precedente di illazione avremmo:

è vero che $p \rightarrow q$
è vera q
____________ → allora concludiamo che:
è vera p.

Nello schema si evidenzia perché tale forma di ragionamento si chiami "assunzione dell'inversa": se è valida una implicazione, dalla verità della premessa posso dedurre la validità della conseguenza, ma non viceversa, non posso *risalire* alla premessa dalla validità della conseguenza.

Nasce spontaneo il paragone tra le due inferenze.
Noi *abbiamo bisogno* quasi sempre, nella vita comune, nel senso comune, di risalire alle premesse, cioè di trarre illazioni a partire da conseguenze che ci sono note. Ma quando lo facciamo, non possiamo pretendere di avere **certezza** di ciò che affermiamo, perché l'illazione può essere valida o meno, e ciò dipende in modo essenziale dal contesto, che spesso rimane completamente implicito nel discorso, ci è noto attraverso altre fonti, dirette o indirette, che non intervengono nella formulazione.

La deduzione è l'unica forma di ragionamento in cui la verità delle conclusioni è *contenuta necessariamente* nella verità delle premesse, dunque l'unico modo in cui possiamo essere sicuri di fare affermazioni vere, relativamente alle premesse vere. Al vantaggio della certezza della conclusione fa da contrasto l'osservazione che spesso essa appare poco interessante, povera di significato, in quanto riguarda fatti particolari e richiede di già conoscere la validità di fatti più generali. Questa è una delle più frequenti critiche alla pretesa di ridurre il ragionamento alla deduzione, in quanto ciò porterebbe a non poter produrre fatti o affermazioni nuove: *la scienza deduttiva in sostanza, si obietta, dice solo quello che già sa*.
Ma ciò non è completamente vero: la deduzione non è solo parlare di ciò che già so. Vi sono proposizioni che posso formulare e considerare vere *solo* in base a deduzioni,

e ciò era già noto a Euclide (esempio del teorema sui numeri primi). La deduzione allora è un *nuovo modo per vedere delle verità* alla luce della ragione e dei suoi strumenti, oltre la constatazione dei fatti empirici.
Tuttavia è vero, e di estrema importanza, che non si può e non si deve **limitare** la ragione all'uso della deduzione, poiché ciò la renderebbe infruttuosa. Anche la scienza ha sempre bisogno di utilizzare *tutte* le forme della ragione e del ragionamento, altrimenti le sarebbe preclusa la possibilità della *scoperta* e della novità.

Uso dei problemi

Anche nel campo della logica è interessante osservare come sia possibile sviluppare un lavoro attraverso i problemi che, se non è esplicitamente insegnare logica in senso tecnico, configura una educazione alla logica forse anche più importante. Anzitutto è educazione alla logica il lavoro linguistico di decodificazione e riflessione sul testo dei problemi, che avviene attraverso qualunque tipologia di problema, ma è favorito dal presentare testi di ogni natura.
Esso può partire dalle tavole di verità dei connettivi più semplici, negazione, congiunzione e alternativa, mostrando a che cosa può servire la formalizzazione nel contesto di espressioni verbali complesse e quasi indecifrabili. Usare le tavole di verità e le regole logiche rende una deduzione (una dimostrazione) un vero e proprio "calcolo", che può raggiungere diversi gradi di difficoltà.
Facciamo qualche semplice esempio che può servire anche nella didattica.

1. Sulla negazione

"Nel corso del processo viene respinta la prova che nega la certezza dell'assenza dell'imputato dal luogo del delitto. L'alibi dell'imputato è stato accettato oppure no?"
(Suggerimento: indicare con *p* la proposizione "l'imputato era assente dal luogo del delitto", e formalizzare le espressioni linguistiche del testo come negazioni o affermazioni)

2. Sulla congiunzione

"A una tavolata sono sedute sette persone. Queste sono le loro affermazioni:

   1. tra noi c'è un solo uomo
   2. tra noi vi sono due uomini
   3. tra noi vi sono tre uomini
   4. tra noi vi sono quattro uomini
   5. tra noi vi sono cinque uomini
   6. tra noi vi sono sei uomini
   7. tutti noi sette qui siamo uomini .

Si sa che le donne dicono la verità, mentre gli uomini mentono. Quanti sono gli uomini?"

3. Sulla implicazione

"Bruno, Aldo e Claudio hanno tre età diverse. Si sa che:

   a) se Bruno non è il più giovane, allora il più giovane è Aldo
   b) se il più giovane non è Claudio, allora il più vecchio è Aldo.

Chi è il più giovane e chi il più vecchio?".

BIBLIOGRAFIA

J. Bochenski *Nove lezioni di logica simbolica*
Edizioni Studio Dehoniano, BO, 1995

C. F. Manara *Il certo e il probabile*. *Piccolo manuale di logica e di calcolo delle probabilità*
La Scuola, BS, 1989

M. Righetti, A. Strumia *L'arte del pensare*
Edizioni Studio Domenicane, BO, 1998

T. Varga *Fondamenti di logica per insegnanti*
Boringhieri, TO, 1973

J. H. Newman *Grammatica dell'assenso*
Jaca Book - Morcelliana, MI, 1980

AA. VV. *Il linguaggio nella didattica delle discipline scientifiche*
Quaderni di DIESSE, MI, 1994.

Parte II

SVILUPPARE I PROBLEMI

In questa lezione faremo, per così dire, la *storia* di un problema: ovvero, vedremo come lo stesso "schema" di problema possa essere utilizzato dalla seconda alla quinta scientifico, mostrando come in una stessa situazione geometrica (parte *fissa* del problema) si possono variare gli obbiettivi o l'incognita, modificando il modello di risoluzione a seconda degli strumenti concettuali di cui gli alunni dispongono. Le considerazioni che faremo hanno lo scopo di mettere in luce una visione *dinamica* sia del problema in sé che del lavoro sui problemi.
Molte delle considerazioni qui esposte sono proposte con ampiezza nei Contrappunti I, II e IV del testo di Andreini, Manara, Prestipino: *Matematica controluce*, vol. 1 e 2.

Fasi del lavoro su un problema

1. Analisi del testo → dati (elementi fissi/elementi variabili)
   → obiettivi

2. Eventuale riformulazione del testo

3. Rappresentazione grafica (evidenziare i dati)

4. Schema logico

5. Scelta dell'incognita (elementi variabili) e analisi dell'intervallo di variazione, con precisazione delle situazioni limite

6. Svolgimento dei calcoli

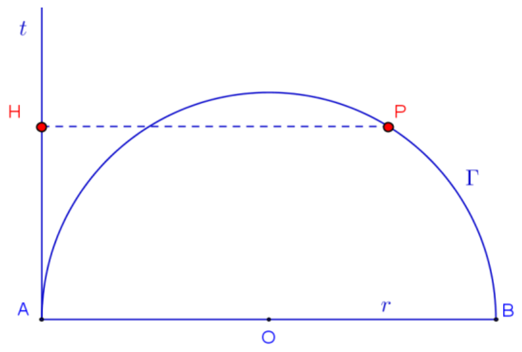
7. Verifica e analisi degli errori

8. Riflessione sul risultato, per 'vedere' meglio ciò che si è conseguito, ed eventualmente spingersi oltre, generalizzando il problema con cambiamento dei dati (possono essere mutati i dati numerici, oppure gli obbiettivi, oppure la configurazione stessa del problema).

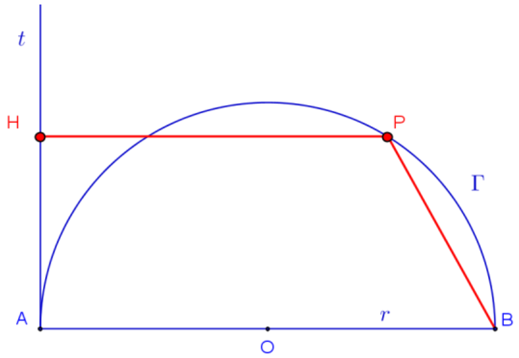
ESEMPIO 1

È data una semicirconferenza Γ di centro O e diametro AB = 2*r*. Sia *t* la semiretta tangente a Γ in A. Detto P un punto appartenente a Γ, sia H la sua proiezione su *t*.

Fig. 1



A] **II scientifico**



Determinare per quale punto P si ha che la somma delle distanze di P da B e dalla semiretta *t* vale $\frac{5}{2}r$.

Fig. 2

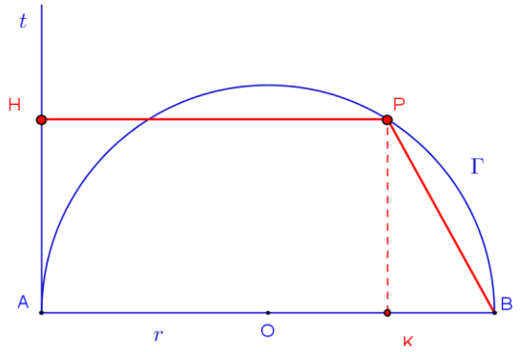
Di solito in seconda un problema di questo tipo, di algebra applicata alla geometria, viene risolto con procedimenti geometrici.

Anzitutto la condizione del problema si traduce nell'**equazione**:

$$PH + PB = \frac{5}{2}r$$

che, tradotta nelle misure dei segmenti, diventerà una equazione algebrica nell'incognita scelta.
Analizziamo gli *elementi variabili* della figura, cercando di interpretare in modo più esplicito il testo.
Il punto P nominato è un *generico* punto della Γ: dunque il testo vuole dire che P varia sulla semicirconferenza, e tra tutte le sue possibili posizioni su di essa, facendolo muovere da A a B o viceversa, stiamo cercando quella *particolare* P* in corrispondenza della quale la somma dei segmenti citati dà $\frac{5}{2}r$. Gli elementi variabili della figura sono dunque il punto P e i due segmenti PB e PH, che variano con esso.
L'incognita deve essere la misura di una grandezza (nel nostro caso, un segmento) che varia con P, e che sia opportuna per esprimere comodamente anche le misure degli altri segmenti coinvolti nella relazione.
Tracciando nella figura 3 anche la proiezione K di P sul diametro AB, la scelta dell'incognita è suggerita dall'osservazione che al variare di P su Γ varia anche la sua proiezione K su AB, e la corrispondenza tra i due punti è biunivoca.

Fig. 3



Perciò porremo: x = BK , vediamo che $0 \le x \le 2r$:

x vale 0 quando P ≡ B,

x vale $2r$ quando P ≡A

cioè percorriamo la Γ da B ad A; se ponessimo x = AK, nel medesimo intervallo di variazione la percorreremmo nel verso opposto.

Per risolvere il problema, dobbiamo ora esprimere le lunghezze dei segmenti PH e PB in funzione dell'incognita x scelta:

$$PH = AK = 2r - x$$

Per esprimere PB, applichiamo il I teorema di Euclide nel triangolo PAB, che è rettangolo (dato implicito nel problema e nella costruzione) perché inscritto in una semicirconferenza:

$$PB = \sqrt{AB \cdot BK} = \sqrt{2rx}$$

L'**equazione** che traduce la condizione del problema è allora:

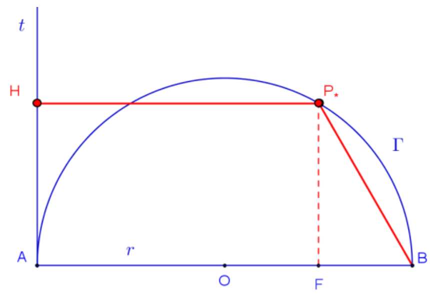
$$2r - x + \sqrt{2rx} = \frac{5}{2}r$$

Risolvendo questa equazione irrazionale con le dovute discussioni si ha la soluzione:

$$x = \frac{r}{2}.$$

La figura 4 mostra la configurazione corrispondente.

Fig. 4



Commenti e variazioni

- Scomponendo l'obbiettivo in due parti:

- esprimere in funzione di una opportuna incognita x la quantità $f(x)$ che dà la somma delle distanze di P da B e dalla semiretta t
- determinare per quale x si ha: $f(x) = \frac{5}{2}r$

si ha una visione *funzionale* di questo problema, e si evidenziano le possibili variazioni che si possono ricavare mantenendo la medesima configurazione iniziale:

- si può variare il secondo membro dell'equazione ($f(x) = \ldots$) fino a renderlo parametrico ($f(x) = k$) (problemi con discussione)
- si può variare la $f(x)$ obiettivo: differenza delle distanze , PH + 3PB, PB - 7PH, … (problemi lineari), oppure: perimetro di ABPH, area di ABPH, area di PBA, area di PBH, differenza delle due aree, rapporto delle due aree, ..

- Questo problema può essere introdotto anche a partire da un contesto di fisica (cinematica).

B] **III scientifico**

Mantenendo la stessa configurazione del problema, usiamo gli strumenti della geometria analitica: in un sistema di riferimento cartesiano possiamo impostare il problema prendendo come incognita una delle coordinate del punto P (x, y) variabile su Γ. Sono possibili allora due tipologie di problema.

a) formulare il problema assegnando la semicirconferenza in un riferimento

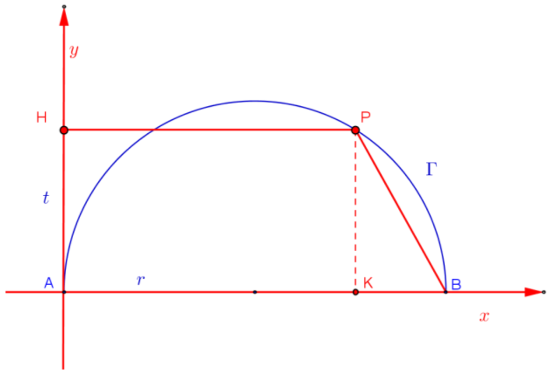


Fig. 5

Se, per esempio, il sistema riferimento è come in figura 5, l'equazione della semicirconferenza Γ è data dal sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2rx = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Il punto P ha coordinate $P(x; \sqrt{2rx - x^2})$
Scegliendo come incognita l'ascissa stessa x del punto P, si ha: x = AK = OK, con $0 \leq x \leq 2r$ si ottiene l'espressione:

$$f(x) = \mathrm{PH} + \mathrm{PB} = x + \sqrt{4r^2 - 2rx}$$

L'equazione: $f(x) = \frac{5}{2}r$ ha soluzione $x = \frac{3}{2}r$.

.

b) chiedere di *scegliere opportunamente* il sistema di riferimento. Sono possibili allora diverse scelte, una è quella in figura 6.

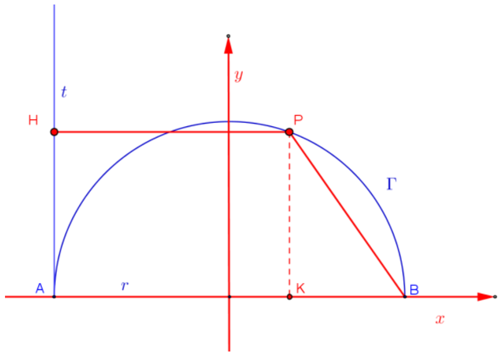


Fig. 6

L'equazione della semicirconferenza ha una forma algebrica più semplice, occorre riflettere su quale sia la scelta dell'incognita più conveniente.

Commenti e variazioni

- Scegliendo diversamente il sistema di riferimento, si ottengono diverse espressioni della relazione del problema.
- In terza scientifico l'obbiettivo del problema può essere espresso da una *disequazione*. Per esempio, potrebbe essere:

  determinare per quali x è $f(x) > 0$, oppure $f(x) \geq \frac{5}{2}r$, o altro.

C] **IV scientifico**

Mantenendo ancora la medesima configurazione, sfruttiamo la goniometria, e il problema può opportunamente essere impostato e risolto prendendo come incognita un **angolo** invece che un segmento, visto che la variazione di P sulla Γ è

sostanzialmente una rotazione. Si otterrà allora una espressione di $f(x)$ come funzione goniometrica.
Anche in questo caso sono possibili diverse scelte, e l'opportunità della scelta di una incognita rispetto a un'altra è da valutare in funzione dell'obbiettivo: per esempio, dovendo esprimere una corda, può risultare opportuno prendere l'angolo alla circonferenza *PAB* che su essa insiste: x = PAB, $0 \leq x \leq \pi/2$.

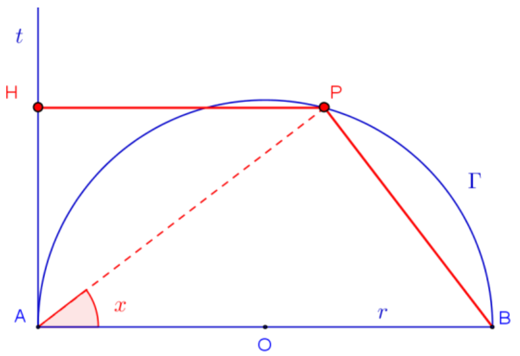


Fig. 7

Si ottiene allora, con questa scelta:

$$PH = AP \cdot \cos x = (2r \cos x) \cdot \cos x = 2r \cos^2 x = 2r\,(1 - \mathrm{sen}^2 x)$$

$$PB = 2r \cdot \mathrm{sen}x \qquad \text{(per il teorema della corda)}$$

L'espressione di $f(x)$ risultante è:

$$f(x) = 2r - 2r \cdot \mathrm{sen}^2 x + 2r \cdot \mathrm{sen}x,$$

l'equazione da risolvere è di secondo grado in sen$x$, ed ha come soluzione $x = \pi/6$.

Commenti e variazioni

- Scegliendo come incognita, per esempio, l'angolo PAH, si ottiene una funzione analoga espressa in cos$x$
- È anche possibile decidere ad esempio il **valore massimo** della funzione nell'intervallo, usando solo considerazioni elementari sulle funzioni composte. Infatti, $f(x)$ è un polinomio di secondo grado in sen$x$; ponendo, ad esempio, sen$x$ = t, possiamo riconoscere una parabola, e dunque concludere che il massimo si ha nel vertice. L'ascissa del vertice è $t = 1/2$, cioè sen$x = 1/2$, $x = \pi/6$.

D] **V scientifico**

Con gli strumenti dell'analisi, il problema, mantenendo ancora la stessa configurazione geometrica, può essere riformulato come problema di ottimo, con la richiesta dello studio di funzione: determinare il massimo (minimo) della somma. Qualunque sia l'impostazione che si sceglie, geometrica, analitica o goniometrica, calcolando la derivata si ottiene il valore massimo:

a) $f(x) = 2r - x + \sqrt{2rx}$ $\qquad f'(x) = -1 + \dfrac{r}{\sqrt{2rx}} = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{2rx} = r \rightarrow x = r/2$

b) $f(x) = 2r - 2r \cdot \mathrm{sen}^2 x + 2r \cdot \mathrm{sen}x,$ $\qquad f'(x) = -4r\,\mathrm{sen}x \cos x + 2r \cos x = 0$

$\rightarrow \cos x = 0$ o $\mathrm{sen}\,x = 1/2,\; x = \pi/6.$

Il valore $\pi/2$ che annulla il coseno è il minimo.

ESEMPIO 2

Internamente a un angolo retto AOB si conduca una semiretta OC. Presi rispettivamente su OA e OB due punti M e N tali che sia: OM = 1 e ON = √3, siano M' e N' le rispettive proiezioni di M e N su OC, e P il punto medio di M'N'.

Esprimere in funzione di una opportuna incognita l'area A(x) del triangolo NOP, rappresentare la funzione ottenuta e stabilire quando è massima nell'intervallo del problema.
(Maturità scientifica 1975)

I) *Analizzare il testo e costruire la figura*.
Rispondere poi alle seguenti domande:
a) quali sono gli elementi fissi e quali gli elementi variabili del problema?
b) vi sono delle simmetrie?
c) quali sono gli obiettivi?
d) quali possibili scelte dell'incognita vedi? Sono scelte equivalenti? Da quale punto di vista?

II) Scelta l'incognita e fissato l'intervallo in cui varia, *analizzare i casi estremi ed esprimere gli obiettivi* del problema in funzione della scelta fatta; risolvere il problema. Fare poi lo stesso lavoro con le altre scelte possibili dell'incognita.
Posto ad esempio x = AOC, si ha: $A(x) = (\sqrt{3}/4)\cdot(\sqrt{3}\ \mathrm{sen}x \cos x + \cos^2 x)$

III) *Mantenendo la stessa configurazione geometrica*, il problema poteva essere formulato con **diversi obiettivi**. Per esempio:
a) esprimere l'area del triangolo POM e determinarne il massimo valore
b) esprimere l'area del quadrilatero ONPM (e determinarne il massimo valore)
c) esprimere il perimetro di ...
d) determinare quando l'area di PON vale $\sqrt{3}/12$
Provare a risolvere il problema con gli obiettivi a) e b), e fare le considerazioni che ne vengono.
Formulare almeno un altro possibile obiettivo e risolvere il problema relativo.

IV) Provare invece a *modificare i dati geometrici* del problema, per esempio considerando un angolo di 60° invece che retto, oppure modificando le misure dei segmenti assegnati. Come si modificano di conseguenza gli obiettivi del problema? Siamo ancora in grado di risolverlo?

V) Impostare il problema per via analitica:
- il sistema di riferimento può essere scelto con gli assi sulle due semirette
- l'incognita più opportuna è in questo caso il coefficiente angolare m (con $m > 0$) della generica retta per l'origine
- l'area del triangolo OPN ha espressione: $A(m) = \dfrac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}m)}{4(1+m^2)}$
- per calcolarne il massimo occorre derivare:
  $A'(m) = (\sqrt{3}/4)\,[\sqrt{3}(1 + m^2) - (1 + \sqrt{3}m)\cdot 2m]/(1 + m^2)^2$
  E si ottiene il valore massimo per $m = 1/\sqrt{3}$.

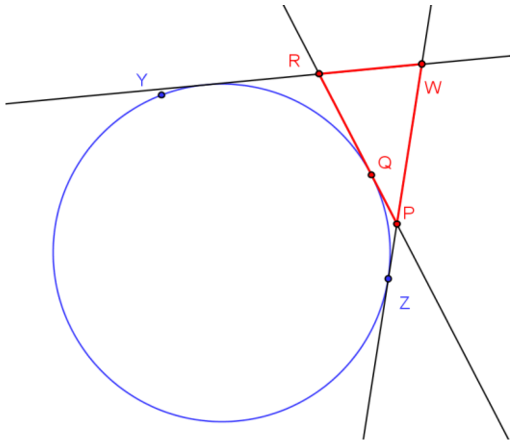
Oltre il problema: l'esercizio inizia dal risultato

ESEMPIO 3

(Kangourou des Mathématiques 1993)

Due tangenti a una circonferenza nei punti rispettivamente Z e Y si incontrano in W. Una terza tangente alla circonferenza nel punto Q incontra WZ in P e WY in R. Sapendo che WZ misura 20, il perimetro del triangolo WPR vale:

A) 42 **B) 36**
C) 50 **D) 40**
E) dipende dalla posizione di Q .



L'ultima tra le risposte suggerisce una modalità di soluzione: bisogna vedere dinamicamente la figura, e fare variare la terza tangente, variando il punto Q sull'arco ZY.

In questo modo si ottiene la risposta, ma soprattutto si vede una proprietà interessante:
"Il perimetro del triangolo non dipende dalla posizione di Q, è invariante al muoversi di Q su ZY, ed è uguale alla somma dei due segmenti di tangente, ovvero al doppio del segmento di tangenza."

ESEMPIO 4

a) Date le due parabole: Γ) $y = x^2$, Γ') $y = x^2 + 2x$,
calcolare la lunghezza delle corde da esse staccate rispettivamente sulle rette
r) $y = 1$ e r') $y = 0$.

Generalizziamo:
b) Consideriamo le parabole: Γ) $y = a \cdot x^2$, Γ') $y = ax^2 + bx + c$
e le rette:
r) $y = k$, r') $y = k + (4ac - b^2)/(4a)$.

Formuliamo e dimostriamo il teorema: "La lunghezza della corda che una parabola stacca su una retta perpendicolare all'asse di simmetria dipende solo dal valore assoluto del coefficiente *a* di x^2 e dalla distanza della retta dal vertice della parabola."